DEMONSTRATION DE L'ABSENCE DE CYCLES D'UNE CERTAINE FORME POUR LE PROBLEME DE SYRACUSE

Introduction: En utilisant un résultat de la théorie des nombres transcendants sur l'approximation de log 3/log 2 par des rationnels, et l'ordinateur, on peut montrer de façon élémentaire que pour la fonction suivante, associée au problème de Syracuse:

$$f_3: \quad n \to \begin{cases} (3n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair} \\ n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

il n'existe pas de cycle $u_0 \in \mathbb{N}^* \to u_1 \to u_2 \to \dots \to u_{m+m'} = u_0$ constitué de m itérations de $n \to (3n+1)/2$ puis de m' divisions par 2 ($m, m' \in \mathbb{N}^*$), autre que le cycle $1 \to 2 \to 1$ ($m = m' = u_0 = 1$).

Supposons que l'on ait un cycle comme ci-dessus, en généralisant momentanément le problème à tout nombre impair $a \geq 3$ en remplacement de 3 dans les expressions précédentes. On trouve alors

$$u_m = \left(\frac{a}{2}\right)^m u_0 + \frac{1}{a-2}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^m - 1\right] = 2^{m'} u_0 \qquad (1)$$

donc

$$2^{m+m'} = a^m + \frac{1}{(a-2)u_0}\left[a^m - 2^m\right] < \left(1 + \frac{1}{(a-2)u_0}\right) a^m$$

$$\rightarrow \quad m+m' < \frac{\log a}{\log 2} m + \log\left(1 + \frac{1}{(a-2)u_0}\right) / \log 2$$

$$\rightarrow \quad m+m' < \frac{\log a}{\log 2} m + \frac{1}{(a-2)u_0 \log 2}$$

et d'autre part

$$u_0 = \frac{1}{a-2} \frac{a^m - 2^m}{2^{m+m'} - a^m} > 0$$

$$\rightarrow \quad 2^{m+m'} - a^m > 0$$

$$\rightarrow \quad m+m' > \frac{\log a}{\log 2} m$$

donc finalement

$$0 < \frac{m+m'}{m} - \frac{\log a}{\log 2} < \frac{1}{(a-2)u_0 \log 2} \frac{1}{m} . \qquad (2)$$

et

$$m+m' = 1 + E\left(\frac{\log a}{\log 2} m\right) \quad \text{si } u_o>1 \text{ ou } a>3.$$

On déduit aussi de (1)

$$\left((a-2)u_o+1\right)a^m = \left(2^{m'}(a-2)u_o+1\right)2^m$$

avec a^m impair donc 2^m divise $(a-2)u_o+1$ (3).

Si maintenant on revient au cas particulier de Syracuse a=3, on en déduit

$$u_o \geq 2^m-1 \qquad (4)$$

D'après [W], la théorie des nombres transcendants donne

$$\left|\frac{\log 3}{\log 2} - \frac{p}{q}\right| > q^{-15} \qquad \text{pour } q\geq 2,\ (p,q)\in \mathbb{N}^{*2},$$

donc d'après (2)

$$m^{-15} < \frac{m+m'}{m} - \frac{\log 3}{\log 2} < \frac{1}{u_o \log 2}\frac{1}{m}$$

donc $u_o < m^{14}/\log 2$, et finalement, d'après (4):

$$2^m-1 < m^{14}/\log 2 \qquad (5)$$

ce qui impose $m \leq 91$ (pour m=92, (5) est fausse, et par récurrence (5) est alors fausse pour m≥92). Il ne reste plus qu'à vérifier que pour $m = 2, 3, \ldots, 91$, les seules valeurs possibles de u_o vérifient:

$$\frac{3^m - 2^m}{2^{m+m'} - 3^m} \notin \mathbb{N}^* \quad \text{avec} \quad m' = 1-m+E\left(\frac{\log 3}{\log 2} m\right)$$

ce qui a été fait sur ordinateur.

O. ROZIER

dernière version reçue le 17.4.1990/2460

[W] WALDSCHMIDT M.: **Equations diophantiennes et nombres transcendants.** Revue du Palais de la Découverte, p.10-24.